

# دوره‌می ریاضی

## استدلالات‌های معتبر و نامعتبر

### اشاره

به‌طور معمول در کلاس درس ریاضی، پرسش‌هایی برای دانش‌آموزان مطرح می‌شوند که پاسخ به آن‌ها به وقت زیادی نیاز دارد. در بعضی موارد، سؤال‌ها به‌گونه‌ای هستند که پاسخ‌گویی به آن‌ها به پیش‌نیازهایی هم وابسته است که تأمین آن‌ها شاید از حوصله کلاس خارج باشد. به همین دلیل با دانش‌آموزان علاقه‌مند به مباحث ریاضی یک دوره‌می ریاضی تشکیل داده‌ایم، به‌طوری که دانش‌آموزان سؤالات و ابهام‌های خود را درباره مطالب کتاب درسی بیان می‌کنند و معلم ضمن پاسخ به این‌گونه پرسش‌ها، مطالبی را به منظور دانش‌افزایی ارائه می‌دهد.

در این شماره به پاسخ سؤال‌ها و ابهام‌هایی در مبحث «آشنایی با منطق ریاضی» درباره استدلالات‌های معتبر و نامعتبر می‌پردازیم. در ضمن از شما دانش‌آموزان عزیز درخواست می‌کنیم که سؤال‌ها و ابهام‌هایی را که از متن کتاب‌های درسی ریاضی برایتان به‌وجود آمده است، برایمان بفرستید تا در دوره‌می‌های بعدی به آن‌ها پاسخ دهیم.

این استدلال معتبر است، زیرا نتیجه آن با ضرورت منطقی از مفروضات استدلال ناشی شده است. به عبارت دیگر، غیرممکن است که مفروضات آن راست باشند و نتیجه آن دروغ باشد. پس می‌گوییم: «استدلالی معتبر است که دارای مفروضات راست و نتیجه دروغ نباشد.»

با این توضیح برای استدلال معتبر، پس استدلالی نامعتبر است که مفروضات آن راست و نتیجه آن دروغ باشد. درست است آقا؟



آفرین علی جان! درست است.



لطفاً یک استدلال نامعتبر مثال بزنید؟ یعنی استدلالی را مثال بزنید که مفروضات آن راست و نتیجه آن دروغ باشد.



فرما، این هم یک مثال خوشگل!



در کتاب درسی آمار و احتمال در توضیح منطق ریاضی نوشته شده است: «این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلالات‌ها می‌پردازد و اعتبار استدلال را مشخص می‌کند.»



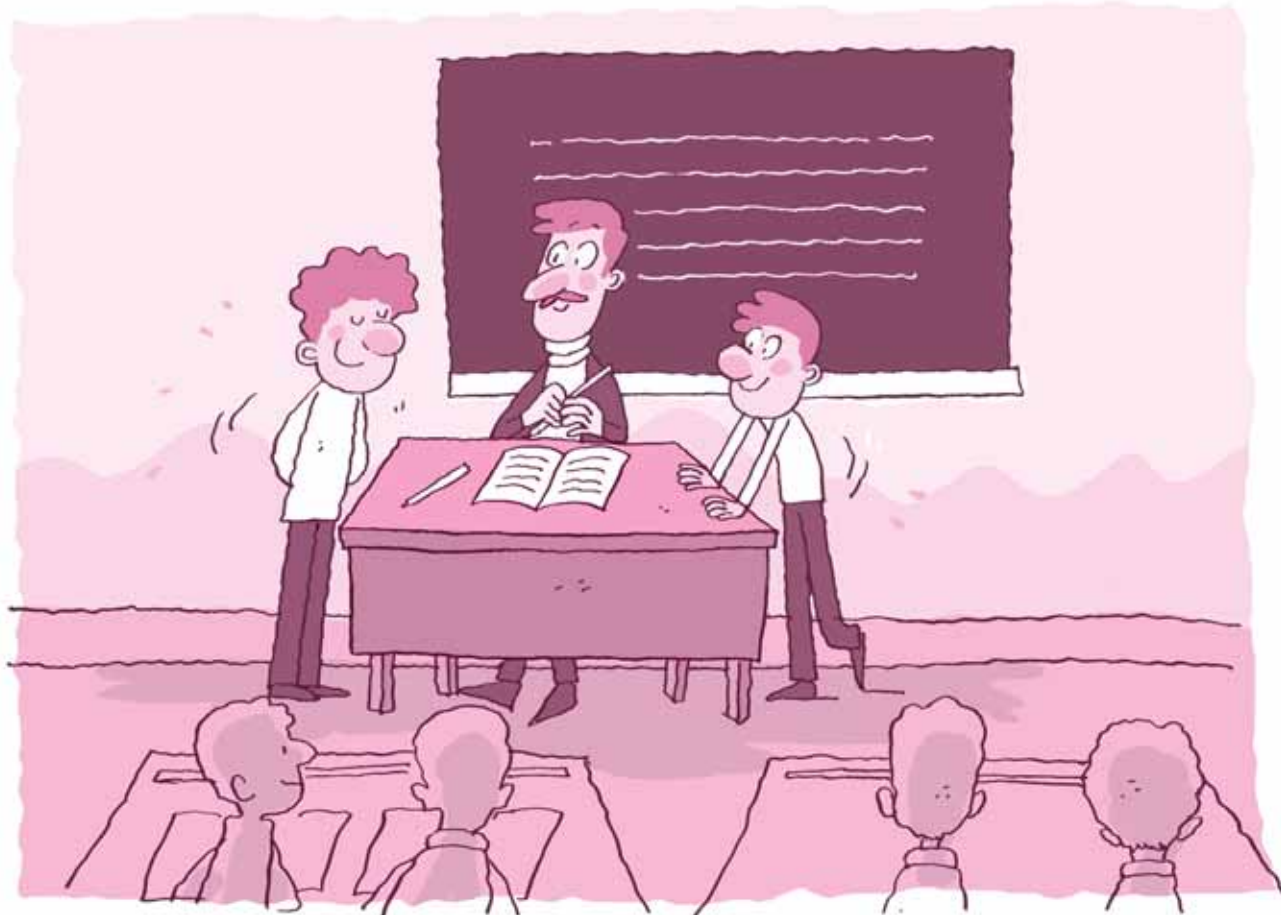
منظور از اعتبار استدلال چیست؟ یعنی منطق ریاضی به‌طور دقیق چه کاری انجام می‌دهد؟ استدلال نامعتبر چیست؟

عزیزم بهتر است اندکی تأمل کنید. بعد از اینکه مفهوم گزاره و ترکیب گزاره‌ها تدریس شد، به‌طور دقیق‌تر می‌توان به این سؤال پاسخ داد، به استدلال ساده زیر توجه کن:



تیم ملی فوتبال ایران، یا تیم ملی فوتبال استرالیا، به جام جهانی می‌رود.  
تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی نمی‌رود.

نتیجه: تیم ملی فوتبال ایران به جام جهانی می‌رود.



همه ماهی‌ها پستان دارند.  
همه نهنگ‌ها ماهی‌اند.

نتیجه: همه نهنگ‌ها پستاندارند.

اگر بیل گیتس (مؤسس شرکت مایکروسافت)  
مالک تمام طلاهای بانک مرکزی باشد، آنگاه او  
ثروتمند است.

بیل گیتس مالک تمام طلاهای بانک مرکزی نیست.

نتیجه: بیل گیتس ثروتمند نیست.

در ادامه معلم به تدریس کتاب پرداخت و با  
مشارکت دانش‌آموزان، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها را  
تکمیل کردند، تا اینکه برای یکی از دانش‌آموزان سؤالی  
پیش آمد.

آقا اینکه گفتید گزاره دارای ارزش  
راست یا دروغ است، آیا می‌توان گفت  
معتبر یا نامعتبر است؟



نه آقا جان! بچه‌ها خوب گوش کنید.  
راستی گفتم «خوب گوش کنید»،  
یاد خاطره‌ای از دوران دانش‌آموزی



خودم افتادم:

آن وقت‌ها معلمی داشتیم که در چنین مواقعی

مفروضات این استدلال راست هستند، اما نتیجه  
دروغ است. چنین استدلال‌هایی نمی‌توانند معتبر باشند،  
زیرا امکان ندارد مفروضات یک استدلال معتبر راست،  
ولی نتیجه آن دروغ باشد.

آیا ممکن است استدلال معتبری  
موجود باشد که مفروضات آن دروغ،  
ولی نتیجه آن راست باشد؟



بله. حالا به استدلال زیر توجه کنید:



می‌گفت: «بچه‌ها، خوب گوش بگیرید!»

بعد، چندتا از بچه‌های شیطان کلاس، به جای اینکه به صحبت‌های معلم گوش کنند، گوش‌های خود را با انگشت می‌گرفتند و بدون اینکه به حرف‌های معلم توجه کنند، فقط سر خود را به نشانه فهمیدن تکان می‌دادند. این در حالی بود که هنوز گوش‌هایشان را با انگشت گرفته بودند. خب، کجا بودیم؟

آقا می‌خواستید فرق بین ارزش راست یک گزاره و استدلال معتبر را بیان کنید.



اعتبار استدلال به رابطه بین گزاره‌های آن استدلال اشاره دارد. یعنی بین مجموعه‌ای از گزاره‌ها به‌عنوان مفروضات استدلال، و یک گزاره که



نتیجه استدلال است، رابطه‌ای وجود دارد. بنابراین اعتبار هرگز نمی‌تواند درباره یک گزاره به خودی خود به کار رود. زیرا رابطه مورد نیاز نمی‌تواند درون یک گزاره حضور یابد. از طرف دیگر، راست یا دروغ بودن (صدق یا کذب) ویژگی یک گزاره است.

یک سؤال دیگر، صدق و کذب گزاره یعنی چه؟ وقتی می‌گوییم ارزش یک گزاره راست است، یعنی چه اتفاقی افتاده است؟



همه ما در جهانی زندگی می‌کنیم که با رویدادهای مختلفی روبه‌رو هستیم. برای مثال، ارزش گزاره «برف سفید است» راست است، زیرا با جهان واقعی



مطابقت دارد.

یعنی در هر جای جهان، هر برفی را ملاحظه کنید، دارای رنگ سفید است. به چنین گزاره‌ای «گزاره کلی» می‌گوییم. زیرا وقتی می‌گوییم: «برف سفید است»، یعنی: «برای هر برفی، برف سفید است.»

گاهی گزاره جزئی است و درباره یک اسم خاصی صحبت می‌کند. مثلاً گزاره «ارتفاع برج میلاد ۴۳۵ متر است»، درباره ارتفاع یک برج خاص صحبت می‌کند و چون ارتفاع ۴۳۵ متر برای برج میلاد با جهان واقعی مطابقت دارد، ارزش این گزاره راست است.

ارزش گزاره جزئی «اصفهان شهری در استان تهران است» دروغ است. زیرا با جهان واقعی مطابقت ندارد و ارزش گزاره «مجموع زاویه‌های داخلی مثلث بزرگ‌تر از  $180^\circ$  است»، در هندسه اقلیدسی دروغ است. گزاره‌هایی هم وجود دارند که قادر نیستیم آن‌ها را با جهان واقعی انطباق دهیم؛ مانند حدس‌ها در ریاضیات. این گزاره‌ها نمی‌توانند هم درست و هم نادرست باشند؛ مانند «حدس گلدباخ» که در صفحه ۳ کتاب آمار و احتمال آمده است. بنابراین اگر گزاره‌ای با جهان واقعی مطابقت داشته باشد، دارای ارزش راست و در غیر این صورت ارزش آن دروغ است. در ادامه بعد از چند جلسه که معلم آموزش درس آشنایی با منطق ریاضی را به پایان برد، رو به بچه‌های کلاس کرد و گفت: «حالا وقت آن رسیده است که به سؤال علی درباره اعتبار استدلال پاسخ کامل‌تری بدهیم.

استدلال صوری زیر را در نظر بگیرید. این استدلال یکی از قواعد منطق به‌شمار می‌رود.

$$\begin{array}{l} \forall x : x \Rightarrow y \\ \forall y : y \Rightarrow z \\ \hline \therefore \forall x : x \Rightarrow z \end{array}$$

بر مبنای قاعده بالا دو مثال زیر را در نظر بگیرید:

### مثال ۱.

هر تهرانی، ایرانی است.  
هر ایرانی، آسیایی است.

نتیجه: هر تهرانی، آسیایی است.

### مثال ۲.

هر تهرانی، اصفهانی است.  
هر اصفهانی، ایرانی است.

نتیجه: هر تهرانی، ایرانی است.

برای اینکه استدلال نامعتبر جذاب تر شود، استدلال زیر را به گونه‌ای آورده‌ایم که شبیه استدلال‌های معتبر باشد. این استدلال نامعتبر است و دارای مفروضات و نتیجه‌ی راست است:

اگر شما در حال خواندن این مقاله هستید، آن‌گاه شما خواب نیستید.  
شما خواب نیستید.

نتیجه: شما در حال خواندن این مقاله هستید.



\* پی‌نوشت‌ها

1. Sound
2. Valid
3. invalid

\* منابع

۱. آمار و احتمال پایه یازدهم، دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۳۹۶.
۲. نبوی، لطف‌الله (۱۳۹۴). مبانی منطق جدید، انتشارات سمت، تهران.
۳. تیدمن، پل و کمین، هاروارد (۱۳۹۳). درآمدی نو به منطق نمادین - منطق جمله‌ها، ترجمه دکتر رضا اکبری، انتشارات دانشگاه امام صادق (ع)، تهران، چاپ چهارم.

به نظر شما تفاوت این دو استدلال چیست؟



استدلال مثال ۱ دارای مفروضات و نتیجه‌ی راست است، اما در استدلال مثال ۲، فرض «هر تهرانی، اصفهانی است»، دروغ است. این در حالی است که هر دو استدلال بر مبنای قاعده‌ی گفته شده در منطق، دارای استدلال صوری درست هستند.



آفرین! خوب تشخیص دادید. استدلال مثال ۱ دارای مفروضات و نتیجه‌ی راست است و از قواعد منطق پیروی می‌کند که در منطق به آن استدلال «متقن<sup>۱</sup>» و معتبر می‌گویند. استدلال مثال ۲ «معتبر<sup>۲</sup>» است، زیرا این نوع استدلال صوری و از قواعد منطق پیروی می‌کند، اما مقدمه‌ی اول آن دارای اعتبار معنایی نیست و دروغ است. این نوع استدلال، استدلال متقن محسوب نمی‌شود.



لطفاً کمی بیشتر درباره‌ی استدلال‌های «نامعتبر<sup>۳</sup>» توضیح دهید.



ساختن استدلال‌های نامعتبر با داشتن هر نوع ترکیبی از راست یا دروغ بودن مقدمه‌ها و نتیجه، بسیار آسان است. کافی است گزاره‌هایی راست یا دروغ را که هیچ ربطی به یکدیگر ندارند، بیان کنیم؛ مانند:



آفریقا یک قاره است.  
گلستان نوشته‌ی سعدی است

نتیجه: ۲ عددی زوج است.

این استدلال دارای مفروضات و نتیجه‌ی راست است، اما واضح است که هیچ‌کس با این استدلال فریب نمی‌خورد. زیرا بین مفروضات و نتیجه با ضرورت منطقی رابطه‌ای وجود ندارد.